Korteweg-de Vries Instituut	Tentamen Stochastiek 2
UvA	3 mei 2016

- **U mag geen rekenmachines, telefoons, laptops, of andere hulpmiddelen gebruiken.**
- **Zet uw naam en studentnummer duidelijk bovenaan op *alle* vellen die u inlevert.**

1. Laat $X_1, \ldots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = \theta x^{-(\theta+1)}, \quad x \geq 1,$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

(a) Bepaal de momentenschatter voor θ onder de extra aanname dat $\theta > 1$.

(b) Bepaal de maximum-likelihoodschatter voor θ.

(c) Bereken de waargenomen Fisher informatie.

(d) Geef een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor θ, met onbetrouwbaarheid α.

(e) Beschouw het toetsingsprobleem $H_0 : \theta = 1$, tegen $H_1 : \theta \neq 1$. Bepaal de likelihood ratio statistiek voor dit probleem en geef het kritieke gebied van de likelihood ratio toets, met onbetrouwbaarheid bij benadering α.

2. Laat $X_1, \ldots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn, geometrisch verdeeld met parameter $\theta \in (0, 1)$. Dat wil zeggen dat

$$\mathbb{P}_\theta(X_i = k) = (1-\theta)^{k-1}\theta, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

We gaan de parameter θ Bayesiaans schatten en gebruiken daarvoor als a-priori verdeling een bètaverdeling met vast gekozen parameters $\alpha, \beta > 0$. De a-priori dichtheid is dus gegeven door

$$\pi(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha, \beta)}, \qquad \theta \in (0, 1),$$

waarbij $\Gamma(\alpha, \beta)$ een normeringsconstante is. De verwachting van deze verdeling is $\alpha/(\alpha + \beta)$.

(a) Bepaal de a-posteriori verdeling.

(b) Bepaal de Bayesschatter voor θ.

3. De opiniepeiler Maurice wil onderzoeken welke fractie p van het Nederlandse volk het kabinet nog steunt. Hij gaat daartoe 500 Nederlanders vragen of ze het kabinet steunen en het aantal steunbetuigingen X tellen.

(a) Als we aannemen dat Nederlanders onafhankelijke denkers zijn, wat is dan de verdeling van X?

(b) Maurice wil aantonen dat meer dan de helft van de Nederlanders het kabinet steunt. Formuleer dit als een toetsingsprobleem.

(c) Stel, Maurice telt x mensen die het kabinet steunen. Geef een formule voor de (benaderde) p-waarde. U mag hierbij gebruik maken van de gebruikelijke benadering.

(d) Hoeveel mensen moeten (bij benadering) hun steun uitspreken om met 95% betrouwbaarheid te kunnen zeggen dat meer dan de helft van de Nederlanders het kabinet steunt? (U mag gebruiken maken van het feit dat voor de kwantielen $\xi_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ van de standaard normale verdeling geldt dat $\xi_{0.95} \approx 1.64$ en $\xi_{0.975} \approx 1.96$.)

4. Laat $X_1, \ldots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met dichtheid

$$p_{\lambda,r}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

waarbij $\lambda > 0$ en $r \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Voor deze verdeling geldt

$$\mathbb{E}_{\lambda,r} X_i = \frac{r}{\lambda}, \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}_{\lambda,r} X_i = \frac{r}{\lambda^2}.$$

(a) Stel dat r bekend is en dat alleen de parameter λ onbekend is. Bepaal een voldoende en volledige statistiek voor λ.

(b) Bepaal een UMVZ schatter voor $1/\lambda$ onder dezelfde veronderstellingen als bij (a).

(c) Bepaal, nog steeds onder dezelfde veronderstellingen als bij (a), de Cramér-Rao ondergrens voor de variantie van een zuivere schatter voor $1/\lambda$ en vergelijk die met de variantie van de schatter die gevonden is in onderdeel (b).

5. Laat $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijk en gelijk verdeeld zijn, met een exponentiële verdeling met parameter $\lambda > 0$. Met andere woorden, X_i heeft dichtheid

$$p_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0.$$

(a) Bepaal de maximum-likelihoodschatter $\hat{\lambda}_n$ voor λ.

(b) Bepaal de Fisher informatie i_λ voor λ in één waarneming en ook de waargenomen Fisher informatie.

(c) Beschouw nu een Bayesiaanse procedure met een standaard exponentiële prior voor λ, d.w.z. dat de a-priori dichtheid gegeven is door $\pi(\lambda) = e^{-\lambda}$ voor $\lambda > 0$. Laat door een tweede orde Taylor benadering van de log-likelihood rond het punt $\hat{\lambda}_n$ zien dat de a-posteriori verdeling voor grote n bij benadering een $N(\hat{\lambda}_n, (ni_\lambda)^{-1})$-verdeling is.

Maximale punten:

1: 3,3,3,2,4. **2**: 3,2. **3**: 2,2,3,3. **4**: 3,3,2. **5**: 2,3,4.

Berekening Eindcijfer:

T = 1 + 9×"fractie behaalde punten".
Als T < 5, dan **Eindcijfer** = T.
Als T ≥ 5, dan **Eindcijfer** = 0.5×T + 0.3×Tussentoets + 0.2×Inleverhuiswerk.