Stochastiek 2

Inleiding in de Mathematische Statistiek

Betrouwbaarheidsgebieden - herhaling

Setting: waarneming $X \sim P_\theta$, $\theta \in \Theta$.

Definitie.

Een stochastische verzameling $G_X \subset \Theta$ die van X afhangt heet een betrouwbaarheidsgebied voor θ met onbetrouwbaarheid $\alpha \in (0,1)$ als

$$\forall\ \theta \in \Theta : P_\theta(\theta \in G_X) \geq 1 - \alpha.$$

Als $\Theta \subset \mathbb{R}$ en G_X is een interval, dan heet G_X een betrouwbaarheidsinterval.

Constructies:

- pivots (normale verwachting, binomiale succeskans, ...)
- MLS als bijna-pivot (Wald interval)
- betrouwbaarheidsgebieden via toetsen

betrouwbaarheidsgebieden en toetsen

Stelling

Setting: waarneming $X \sim P_\theta$, $\theta \in \Theta$.

Willen: een betrouwbaarheidsgebied voor $g(\theta)$, voor een gegeven functie $g : \Theta \to g(\Theta)$ (meestal $g : \Theta \to \mathbb{R}$).

Toetsen: gegeven $\alpha \in (0,1)$ en voor iedere $\tau \in g(\Theta)$ een toets van niveau α voor $H_0 : g(\theta) = \tau$ tegen $H_1 : g(\theta) \neq \tau$, met kritiek gebied K_τ.

Stelling.

In deze setting is

$$\begin{aligned} G_X &= \{\tau \in g(\Theta) : X \notin K_\tau\} \\ &= \{\tau : \text{ ``}H_0 : g(\theta) = \tau\text{'' wordt niet verworpen bij waarneming } X\} \end{aligned}$$

een betrouwbaarheidsgebied voor $g(\theta)$ met onbetrouwbaarheid α.

likelihood-ratiogebieden

Likelihood-ratiostatistiek - asymptotische verdeling

Setting: o.o. waarnemingen $X_1, \dots, X_n \sim p_\theta$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$.
Hypothesen: $H_0 : \theta \in \Theta_0$, $H_1 : \theta \in \Theta_1$.

Aanname: stel dat voor $\theta_0 \in \Theta_0$:

$$\sqrt{n}(\Theta - \theta_0) \to \text{“}k\text{-dim. lineaire ruimte”},$$

$$\sqrt{n}(\Theta_0 - \theta_0) \to \text{“}k_0\text{-dim. lineaire ruimte”}$$

als $n \to \infty$.

“Stelling”

In deze setting geldt onder regulariteitsvoorwaarden dat onder P_{θ_0},

$$2 \log \frac{\prod_{i=1}^n p_{\hat{\theta}_n}(X_i)}{\sup_{\theta_0 \in \Theta_0} \prod_{i=1}^n p_{\theta_0}(X_i)} \xrightarrow{\mathrm{d}} \chi^2_{k-k_0}$$

als $n \to \infty$, met $\hat{\theta}_n$ de MLS.

Likelihood-ratiogebied - hele parameter

Stel nu, we willen een b.g. voor θ zelf ($g(\theta) = \theta$).

Onder regulariteitsvoorwaarden: LR-toets van benaderd niveau α voor $H_0 : \theta = \tau$ verwerpt H_0 als

$$2 \log \frac{\prod_{i=1}^n p_{\hat{\theta}_n}(X_i)}{\prod_{i=1}^n p_\tau(X_i)} \geq \chi^2_{k,1-\alpha}.$$

Benaderd b.g. voor θ met onbetrouwbaarheid α dus:

$$\left\{ \theta \in \Theta : \log \prod_{i=1}^n p_\theta(X_i) - \log \prod_{i=1}^n p_{\hat{\theta}_n}(X_i) \geq -\frac{1}{2} \chi^2_{k,1-\alpha} \right\}.$$

Likelihood-ratiogebied - opmerkingen

- LR-gebied: gebied waar de log-likelihood “groot” is (relatief).
- De MLS zit altijd in het LR-gebied
- Als de log-likelihood meerdere lokale maxima heeft, kan het LR-gebied onsamenhangend zijn (uit meerdere gescheiden delen bestaan).

$\rightarrow$ vb. 5.23

Likelihood-ratiogebied - één component v.d. parameter

Stel nu, we willen een b.g. voor θ_1 ($g(\theta) = g(\theta_1, \ldots, \theta_k) = \theta_1$).

Onder regulariteitsvoorwaarden: LR-toets van benaderd niveau α voor $H_0 : \theta_1 = \tau$ verwerpt H_0 als

$$2 \log \frac{\prod_{i=1}^n p_{\hat{\theta}_n}(X_i)}{\sup_{\theta:\theta_1=\tau} \prod_{i=1}^n p_\theta(X_i)} \geq \chi^2_{1,1-\alpha}.$$

Benaderd b.g. voor θ_1 met onbetrouwbaarheid α dus:

$$\left\{\tau \in \mathbb{R} : \log \color{red}{\sup_{\theta:\theta_1=\tau} \prod_{i=1}^n p_\theta(X_i)} - \log \prod_{i=1}^n p_{\hat{\theta}_n}(X_i) \geq -\frac{1}{2}\chi^2_{1,1-\alpha}\right\}.$$

In rood: de profile likelihood.

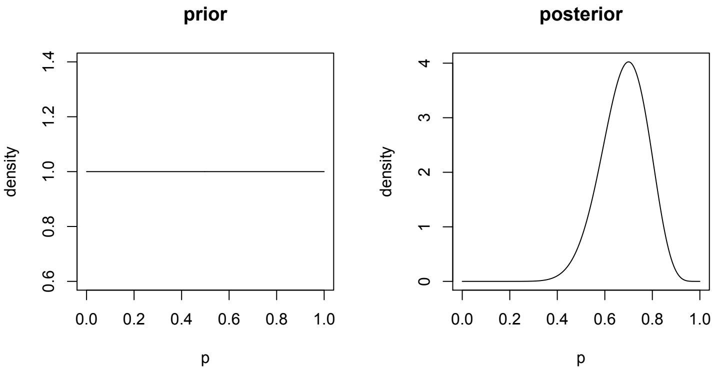
Credible sets

(Bayesiaanse "betrouwbaarheidsgebieden")

Credible sets - 1

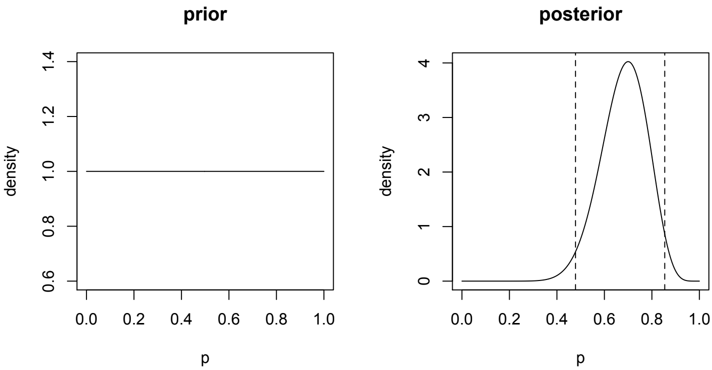
Bayesiaanse betrouwbaarheidsgebieden: Credible sets.

Data: $X \sim \text{Bin}(n, p)$, prior $\pi \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$.
Posterior: $\text{Beta}(X + \alpha, n - X + \beta)$.



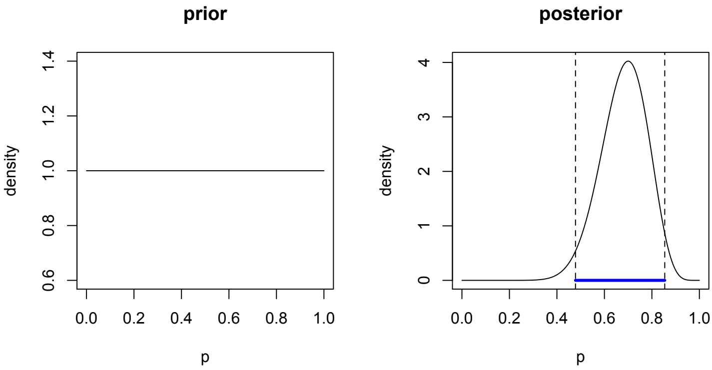
Credible sets - 2

Kies $\alpha \in (0, 1)$ (bijv. 0.05).
Bepaal gebied waar $1 - \alpha$ a-posteriori massa ligt:



Credible sets - 3

Dat gebied heet dan een $1 - \alpha$ credible interval.
Hier het blauwe interval:



Credible sets versus betrouwbaarheidsgebieden

- Een credible set is i.h.a. niet automatisch ook een betrouwbaarheidsgebied.
- In gladde, parametrische modellen is dat asymptotisch wel zo.
- Gevolg van Bernstein-Von Mises.

Bernstein-von Mises

Zij $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o.o. $\sim p_\theta$, voor $\theta \in \mathbb{R}$. "Regulier" model.

Def. $\ell_\theta(x) = \log p_\theta(x)$, $\dot{\ell}_\theta(x) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ell_\theta(x)$ en $i_\theta = Var_\theta \dot{\ell}_\theta(X_1)$. Zij $\hat{\theta}_n$ de MLS.

Beschouw een a-priori verdeling op θ met positieve, continue dichtheid π. Zij $p_{\bar{\Theta}\,|\,X_1,\ldots,X_n}$ de corresponderende a-posteriori dichtheid.

Bernstein-von Mises (Stelling 5.26): onder regulariteitsvw. geldt voor alle B

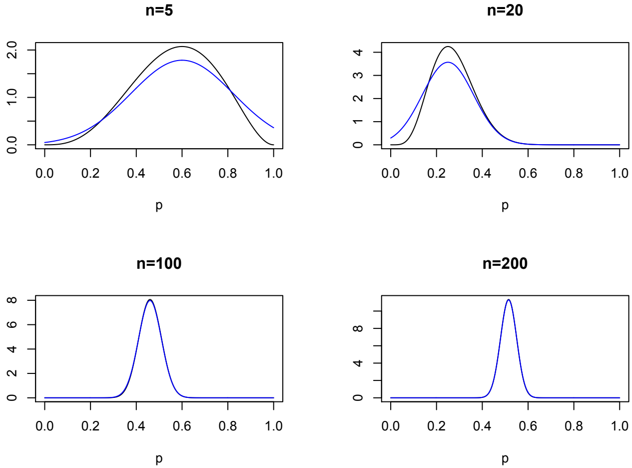
$$\int_B p_{\bar{\Theta}\,|\,X_1,\ldots,X_n}(\theta)\, d\theta \approx N\Big(\hat{\theta}_n, \frac{1}{n i_{\theta_0}}\Big)(B),$$

voor $n \to \infty$.

Sterker: dit geldt uniform in B!

Illustratie

Data: $X \sim \text{Bin}(n, p)$, prior $\pi \sim$ Uniform. Posterior (zwart): $\text{Beta}(X + 1, n - X + 1)$, BvM benadering (blauw): $N(X/n, p(1 - p)/n)$.



Credible sets versus betrouwbaarheidsgebieden

Beschouw een $1-\alpha$ credible interval bestaande uit het interval tussen het $\alpha/2$- en het $1-\alpha/2$-kwantiel van de a-posteriori verdeling.

Als BvM geldt, is dit asymptotisch van de vorm

$$I = \left[\hat{\theta}_n - \frac{1}{\sqrt{n i_{\theta_0}}}\xi_{1-\alpha/2}, \hat{\theta}_n + \frac{1}{\sqrt{n i_{\theta_0}}}\xi_{1-\alpha/2}\right].$$

Onder de regulariteitsvoorwaarden hebben we

$$P_{\theta_0}(\theta_0 \in I) = P_{\theta_0}(\xi_{\alpha/2} \leq \sqrt{n i_{\theta_0}}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \leq \xi_{1-\alpha/2}) \to 1-\alpha,$$

omdat $\sqrt{n i_{\theta_0}}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1)$.

Dus in gladde, reguliere modellen: een $1-\alpha$ credible interval is een benaderd $1-\alpha$ betrouwbaarheidsinterval.