Korteweg-de Vries Instituut	Inleveropdracht "Stochastiek 2"
UvA	4 oktober 2018

Spelregels:

- **Deadline: ZONDAG 14 OKTOBER 2018!**
- **U mag alleen werken of in tweetallen.**
- **Antwoorden naar werkcollegedocent, per email of in postvakje.**
- **Zet namen en studentnummers duidelijk bovenaan het document.**

1. Download weer het tekstbestand

   `http://www.epsilon-uitgaven.nl/bijlagen/E76/E76-tweelingdata.txt`.

   en maak in R weer vectoren `man` en `vrouw` die, respectievelijk, de lengtes van de mannen en de vrouwen bevatten.

   We postuleren dat de geobserveerde mannen- en vrouwenlengtes steekproeven vormen uit, respectievelijk, een $N(\mu_m, \sigma_m^2)$- en een $N(\mu_v, \sigma_v^2)$-verdeling.

   Geef de standaardschattingen $\hat{\mu}_m, \hat{\sigma}_m^2, \hat{\mu}_v$ en $\hat{\sigma}_v^2$ voor de vier parameters.

2. Voor de mannen, plot in één figuur een (genormaliseerd) histogram en de dichtheid van de $N(\hat{\mu}_m, \hat{\sigma}_m^2)$-verdeling. Maak de analoge plot voor de vrouwenlengtes. Hoe plausibel acht u de "fit" van het aangenomen normale model?

3. Laat $X_1, \ldots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = \frac{2\theta}{9^\theta} x^{2\theta-1}, \quad x \in [0, 3],$$

   waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

   (a) Bepaal de momentenschatter voor θ.

   (b) Bepaal de maximum likelihood-schatter voor θ.

z.o.z.

4. Laat $X_1, \ldots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn, geometrisch verdeeld met parameter $\theta \in (0,1)$. Dat wil zeggen dat

$$\mathbb{P}_\theta(X_i = k) = (1-\theta)^{k-1}\theta, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

We gaan de parameter θ Bayesiaans schatten en gebruiken daarvoor als a-priori verdeling een beta verdeling met vast gekozen parameters $\alpha, \beta > 0$. Deze heeft dichtheid

$$\pi(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, \quad \theta \in (0,1),$$

waarbij $B(\alpha, \beta)$ een normeringsconstante is. De verwachting van deze verdeling is $\alpha/(\alpha+\beta)$.

   (a) Bepaal de a-posteriori verdeling.

   (b) Bepaal de Bayes-schatter voor θ.

5. Laat $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijk zijn en Poisson verdeeld met parameter $\lambda > 0$. Dus de dichtheid van X_i wordt gegeven door

$$\mathbb{P}_\lambda(X_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

   (a) Bepaal de maximum likelihood-schatter (MLS) voor λ.

   (b) Laat zien dat de MLS een zuivere schatter voor λ is en vergelijk de variantie van de MLS met de Cramér-Rao ondergrens.