# Stochastiek 2

Inleiding in de Mathematische Statistiek

# Statistische toetsen

# Toetsen - algemeen - 1

Setting: observatie $X$ in $\mathcal{X}$, model $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$.

Gegeven partitie $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$, met $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$. Willen aantonen dat $\theta \in \Theta_1$. Hypothesen worden dan:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{– nulhypothese},$$
$$H_1 : \theta \in \Theta_1 \quad \text{– alternatieve hypothese}.$$

Doel: op basis van de data concluderen:

- $H_0$ verwerpen (en dus $H_1$ accepteren), of
- $H_0$ niet verwerpen (maar niet noodzakelijkerwijs $H_0$ accepteren, te weinig info).

# Toetsen - algemeen - 2

Constructie van een toets:

- Bepaal een toetsingsgrootheid $T(X)$ die "informatie geeft" over $\theta$.
- Voor een gegeven niveau $\alpha \in (0, 1)$, bepaal een kritiek gebied $K$ z.d.d.

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(T(X) \in K) \leq \alpha$$

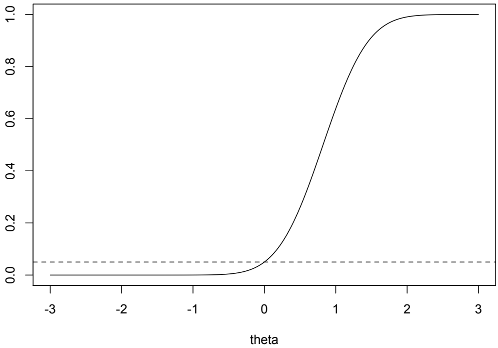
  en dat verder zo groot mogelijk is.
- Toets wordt dan: "verwerp $H_0$ als $T(X) \in K$".

N.B. Willen graag verdeling van $T(X)$ "onder $H_0$" kennen.

# Toetsen - algemeen - 3

Het onderscheidend vermogen $\pi(\cdot; K) : \Theta \to [0, 1]$,

$$\pi(\theta; K) = P_\theta(T(X) \in K), \qquad \theta \in \Theta,$$




Hier $\Theta_0 = (-\infty, 0]$, $\Theta_1 = (0, \infty)$ en $\alpha = 0.05$.

$\to$ vb. 4.13, 4.15, 4.16

# Overschrijdingskansen, p-waarden

# Definitie

We construëren steeds voor gegeven $\alpha \in (0, 1)$ een kritiek gebied $K_\alpha$ dat een toets van niveau $\alpha$ geeft.

We fixeren het niveau $\alpha$. Als we observatie $X = x$ krijgen, verwerpen we $H_0$ als $T(x) \in K_\alpha$.

Definitie.
Voor gegeven observatie $X = x$ is de overschrijdingskans of p-waarde van de toets

$$\inf\{\alpha \in (0, 1) : T(x) \in K_\alpha\},$$

i.e. de kleinste waarde van $\alpha$ z.d.d. de toets bij de observatie $X = x$ de nulhypothese $H_0$ verwerpt.

# Voorbeeld

Stel, toets van niveau $\alpha$ is van de vorm "verwerp $H_0$ als $T(X) \geq d_\alpha$", met

$$d_\alpha = \min\left\{t : \sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta(T(X) \geq t) \leq \alpha\right\}.$$

Dan voor gegeven observatie $x$,

$$\begin{aligned}\inf\{\alpha \in (0,1) : T(x) \in K_\alpha\} &= \inf\{\alpha \in (0,1) : T(x) \geq d_\alpha\} \\ &= \inf\left\{\alpha \in (0,1) : \sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta(T(X) \geq T(x)) \leq \alpha\right\} \\ &= \sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta(T(X) \geq T(x)).\end{aligned}$$

Dit is een rechter overschrijdingskans. Analoog: linker overschrijdingskans en tweezijdige overschrijdingskans.
ZELF GOED BESTUDEREN!

# Interpretatie

Heel slordig gezegd: de $p$-waarde is de kans onder de nulhypothese dat je de geobserveerde waarde van de toetsingsgrootheid ziet, of een nog extremere.

Als die kans heel klein is (bijv $\leq 0.05$), dan is dat aanleiding om de nulhypothese verwerpen.

$\rightarrow$ vb. 4.23, 4.24

Intermezzo:

verdeling van steekproefgemiddelde en
-variantie van normaal verdeelde steekproef

# Chikwadraat- en t-verdeling

Laat $Z$ en $W_1, \ldots, W_n$ onafhankelijk en $N(0,1)$-verdeeld zijn.

**Definitie.**
De verdeling van $W_1^2 + \cdots + W_n^2$ heet de chikwadraat-verdeling met $n$ vrijheidsgraden. Notatie: $\sim \chi_n^2$.

**Definitie.**
De verdeling van

$$\frac{Z}{\sqrt{(W_1^2 + \cdots + W_n^2)/n}}$$

heet de t-verdeling met $n$ vrijheidsgraden. Notatie: $\sim t_n$.

# De stelling

**Stelling.**

Laat $X_1, \ldots, X_n$ o.o. zijn en $N(\mu, \sigma^2)$-verdeeld. Dan:

(i) $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$,

(ii) $(n-1)S_X^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$,

(iii) $\bar{X}$ en $S_X^2$ zijn onafhankelijk (!),

(iv) $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S_X \sim t_{n-1}$.

# Bewijs van (ii) en (iii) - 1

Stel z.b.d.a. $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$.

Definieer $f_1 = (1/\sqrt{n}, \ldots, 1/\sqrt{n})$. Vul aan tot orthonormale basis en zet deze vectoren als rijen in een orthogonale matrix $O$. Definieer $Y = OX$.

Algebra: $Y_1 = \sqrt{n}\bar{X}$ en $\sum_{i=2}^n Y_i^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

Voldoende om te laten zien dat $Y$ een vector o.o. $N(0,1)$ variabelen is.

## Bewijs van (ii) en (iii) - 2

Neem $y \in \mathbb{R}^n$. Dan, omdat $O$ een orthogonale matrix is,

$$
\begin{aligned}
P(Y \leq y) = P(OX \leq y) \\
&= \int \cdots \int_{x : Ox \leq y} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2} \, dx_1 \cdots dx_n \\
&\overset{(u=Ox)}{=} \int \cdots \int_{u : u \leq y} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\|u\|^2} \, du_1 \cdots u_n.
\end{aligned}
$$

We zien dat de vector $Y$ simultane dichtheid

$$
u \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\|u\|^2}
$$

heeft. $\square$

# t-toetsen

# Eensteekproef-t-toets

Eensteekproef geval: we hebben één steekproef $X_1, \ldots, X_n$, o.o., $N(\mu, \sigma^2)$-verdeeld, met *zowel $\mu$ als $\sigma$ onbekend*.

Probleem: hypothese over de verwachting $\mu$. Voor gegeven $\mu_0 \in \mathbb{R}$ één van

$$H_0 : \mu \leq \mu_0, \quad H_0 : \mu \geq \mu_0, \quad \text{of} \quad H_0 : \mu = \mu_0.$$

$\rightarrow$ vb. 4.30

# Tweesteekproevenprobleem

Tweesteekproeven geval: we hebben twee steekproeven, $X_1, \ldots, X_m$ o.o. uit verdeling **I** en $Y_1, \ldots, Y_n$ o.o. uit verdeling **II**.

Probleem:
Algemeen: vergelijken verdelingen **I** en **II**. Meestal: is de verwachting van verdeling **I** gelijk aan die van verdeling **II** of niet?

Twee deelgevallen:

- gepaarde waarnemingen: $m = n$ en data vormen natuurlijke paren $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$. Coördinaten binnen een paar mogen afhankelijk zijn, paren onderling onafhankelijk. Typisch voorbeeld: $X_i \sim$ "voor", $Y_i \sim$ "na".

- ongepaarde waarnemingen: mogelijk $n \neq m$, meestal $X$-vector en $Y$-vector onafhankelijk.

→ vb. 4.33, 4.34, 4.35