Stochastiek 2

Inleiding in de Mathematische Statistiek

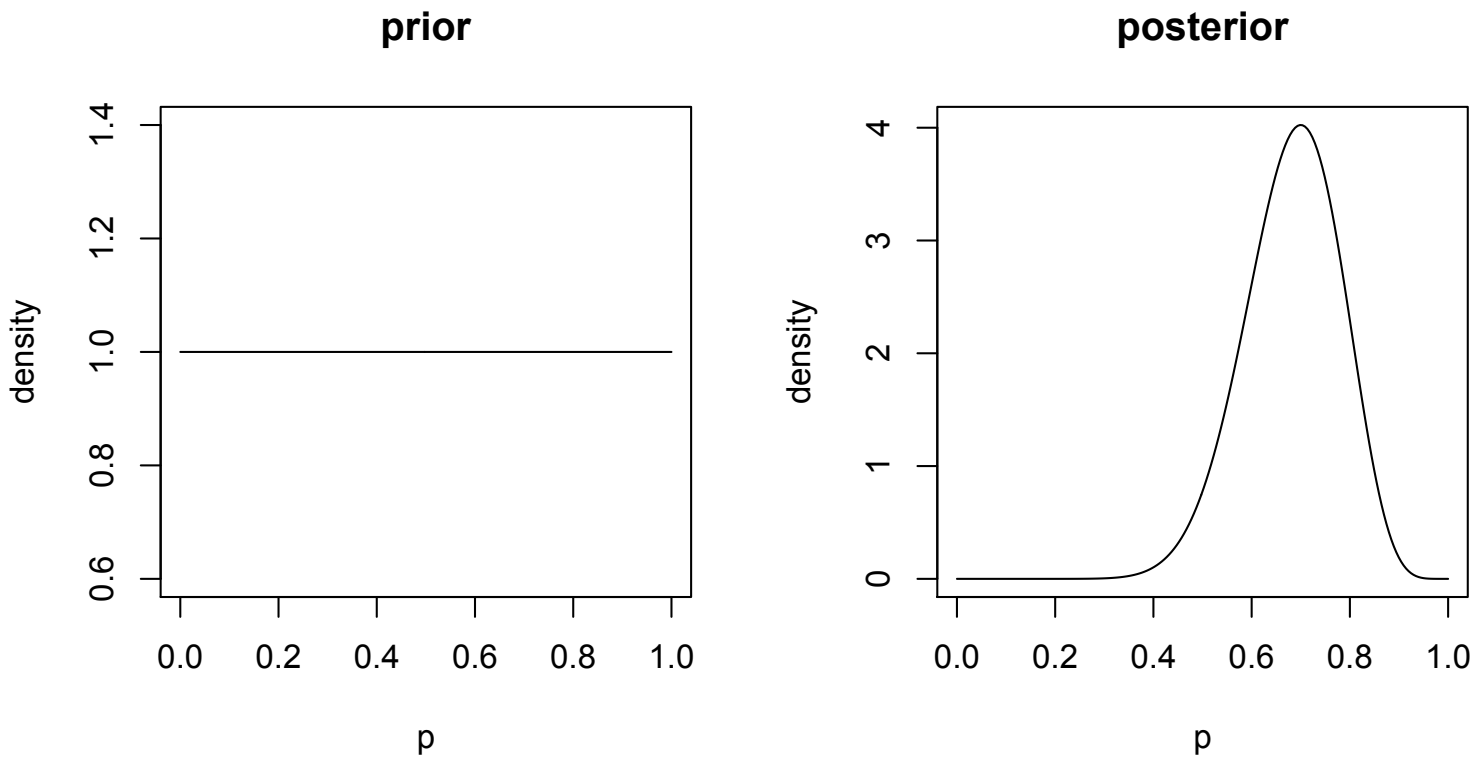
Credible sets

(Bayesiaanse "betrouwbaarheidsgebieden")

Credible sets - 1

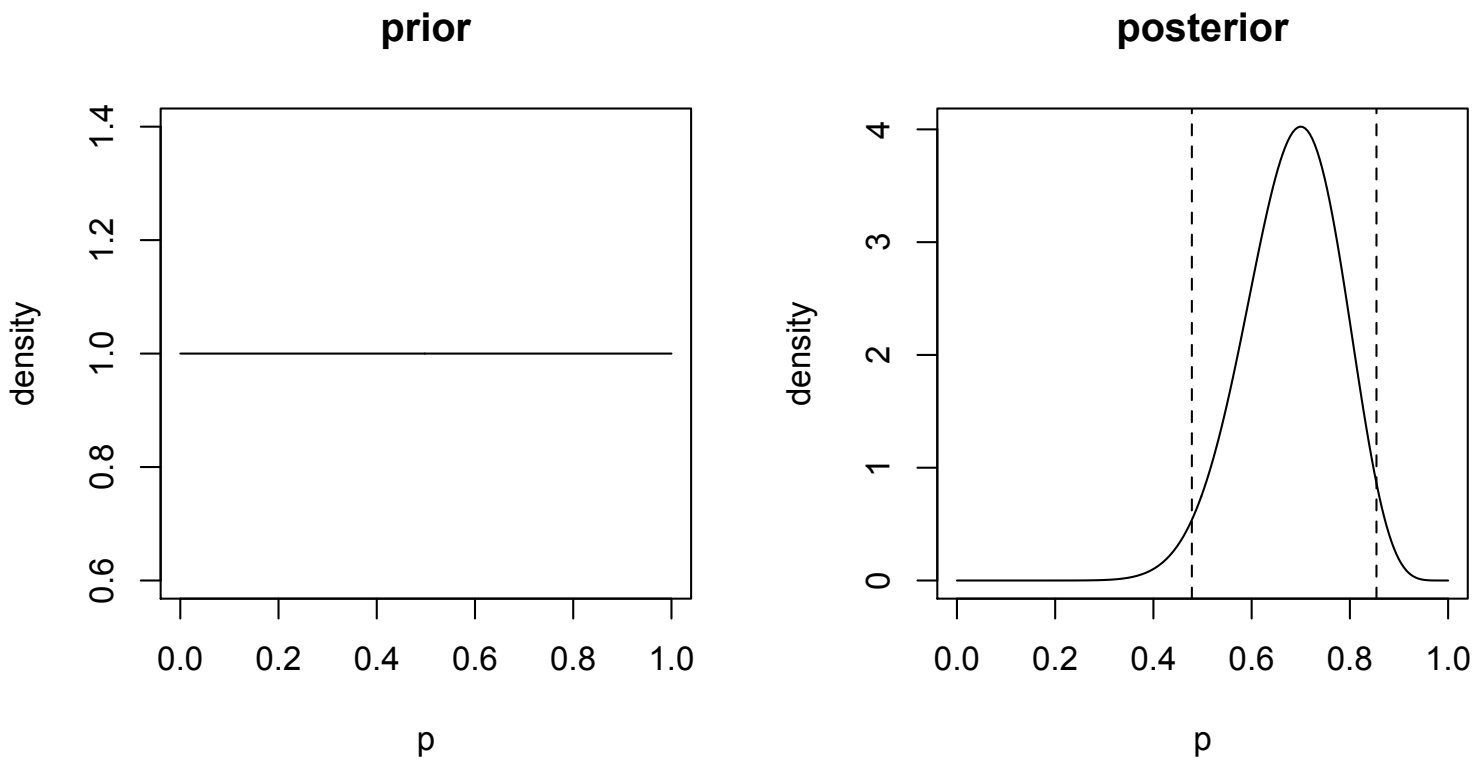
Bayesiaanse betrouwbaarheidsgebieden: Credible sets.

Data: $X \sim \text{Bin}(n, p)$, prior $\pi \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$.
Posterior: $\text{Beta}(X + \alpha, n - X + \beta)$.



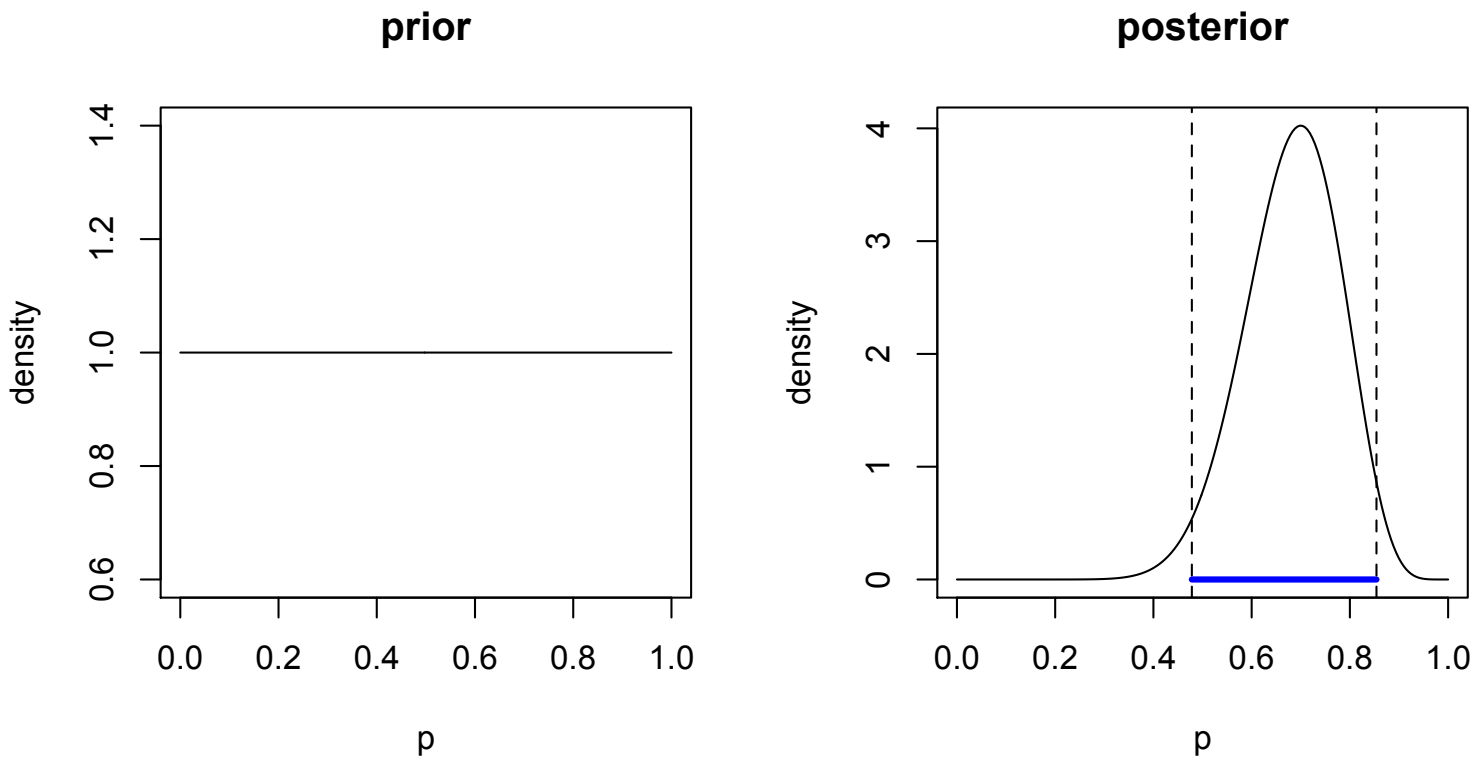
Credible sets - 2

Kies $\alpha \in (0, 1)$ (bijv. 0.05).
Bepaal gebied waar $1 - \alpha$ a-posteriori massa ligt:



Credible sets - 3

Dat gebied heet dan een $1 - \alpha$ credible interval.
Hier het blauwe interval:



Credible sets versus betrouwbaarheidsgebieden

- Een credible set is i.h.a. niet automatisch ook een betrouwbaarheidsgebied.
- In gladde, parametrische modellen is dat asymptotisch wel zo.
- Gevolg van Bernstein-Von Mises.

Credible sets versus betrouwbaarheidsgebieden

Zij $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o.o. $\sim p_\theta$, voor $\theta \in \mathbb{R}$. "Regulier" model.
Def. $\ell_\theta(x) = \log p_\theta(x)$, $\dot{\ell}_\theta(x) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ell_\theta(x)$ en $i_\theta = Var_\theta \dot{\ell}_\theta(X_1)$

BvM handout:

$$\int_B p_{\bar{\Theta}\,|\,X_1,\ldots,X_n}(\theta)\,d\theta \approx N\Big(\theta_0 + \frac{\Delta_n}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n i_{\theta_0}}\Big)(B),$$

met

$$\Delta_n = \frac{1}{i_{\theta_0}\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \dot{\ell}_{\theta_0}(X_i).$$

Credible sets versus betrouwbaarheidsgebieden

Een (symmetrisch) $1-\alpha$ credible interval is dan asymptotisch van de vorm

$$I = \left[\theta_0 + \frac{\Delta_n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n i_{\theta_0}}}\xi_{\alpha/2}, \theta_0 + \frac{\Delta_n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n i_{\theta_0}}}\xi_{1-\alpha/2}\right].$$

We hebben

$$P_{\theta_0}(\theta_0 \in I) = P_{\theta_0}(\xi_{\alpha/2} \leq -\sqrt{i_{\theta_0}}\Delta_n \leq \xi_{1-\alpha/2}) \to 1-\alpha,$$

omdat $-\sqrt{i_{\theta_0}}\Delta_n \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1)$.

Dus in gladde, reguliere modellen: een $1-\alpha$ credible interval is een benaderd $1-\alpha$ betrouwbaarheidsinterval.

En nu . . .

Wat hebben we gedaan

Setting: meestal $X_1, \ldots, X_n$ o.o. $X_i \sim p_\theta$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$, $k = 1, 2$.

- Grafische methoden voor model check
- Methoden voor schatten van θ (ad hoc, MLE, Bayes, momenten)
- Methoden voor toetsen van hypothesen (Gauss-toets, binomiale toets, t-toetsen, likelihood-ratiotoets)
- Methoden voor betrouwbaarheidsgebieden ((bijna) pivots, likelihood-ratiogebieden, credible sets)
- Optimaliteitstheorie, basis asymptotiek voor MLS en Bayes

Wat is er nog meer te doen

- Grondslagen: maattheoretische en waarschijnlijkheidstheoretische achtergrond
- (Asymptotische) statistische theorie
- Hoog-dimensionale/niet-parametrische statistiek: schatten hoog/oneindig-dim parameter
- Statistisch modelleren: (gegeneraliseerde) lineaire modellen, ...
- Afhankelijke data: tijdreeksen.
- Numerieke methoden: EM, MCMC, bootstrap, ...
- Toegepaste statistiek: forensische statistiek, biostatistiek, netwerkstatistiek, ...
- Machine Learning

Vakken die je kan doen

Bachelor:

- Bayesiaanse statistiek
- Statistische data analyse (VU)
- Tweede- en derdejaars projecten
- Maattheorie
- Markov ketens
- Analyse, Functionaalanalyse
- ...

Vakken die je kan doen

Master:

- Measure theoretic probability (mastermath)
- Asymptotic statistics (mastermath)
- Statistical Theory for High- and Infinite-Dimensional Models (mastermath)
- Bayesian Statistics (mastermath)

- High-dimensional data analysis (VU)
- Simulation methods for statistics
- Statistics for Networks (?, VU)
- ...

Lineaire modellen

Voorbeeld

Data: $(\underbrace{Y_i}_{\text{response}}, \underbrace{x_{i,1}, \ldots, x_{i,p}}_{\text{“verklarend”}})$, $i = 1, \ldots, n$.

Model: $Y_i = \beta_1 x_{i,1} + \cdots + \beta_p x_{i,p} + \varepsilon_i$, met ε_i i.i.d., verwachting 0.

Vragen:

- Schat de parameter $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$.
- Is β_i significant $\neq 0$?
- Welke verklarende variabelen moeten er in het model opgenomen worden?
- Wat als $p \gg n$?
- ...

Niet-parametrische statistiek

Voorbeelden:

- $X_1, \ldots, X_n$ o.o., met dichtheid f. Vraag: schat f.
- $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ o.o.,

$$Y_i = f(X_i) + \varepsilon_i,$$

met $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ o.o., $N(0, \sigma^2)$. Vraag: schat f (en σ^2).

Vragen:

- Rate $\sqrt{n}$ i.h.a. onmogelijk. Welke rate zijn wel mogelijk? (Hangt af van "complexiteit" van f, bijv gladheid!).
- Welke schatters halen optimale rates?

Statistical Learning

http://mlg.eng.cam.ac.uk/pilco/

Het wordt alleen maar leuker . . .