Korteweg-de Vries Instituut	Tussentoets Stochastiek 2
UvA	22 oktober 2015

- **U mag geen rekenmachines, telefoons, laptops, of andere hulpmiddelen gebruiken.**
- **Zet uw naam en studentnummer duidelijk bovenaan op *alle* vellen die u inlevert.**

Succes!

1. Laat $X_1, \ldots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = \begin{cases} e^{x-\theta}, & x \leq \theta, \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

waarbij $\theta \in \mathbb{R}$ een onbekende parameter is.

(a) Bereken de verwachting $\mathbb{E}_\theta X_1$ en bepaal de momentenschatter voor θ.

(b) Bepaal de maximum likelihood schatter voor θ.

(c) Laat zien dat het maximum $X_{(n)}$ een voldoende en volledige statistiek is voor de parameter θ.

(d) Bepaal een UMVZ-schatter voor θ.

2. Laat $X_1, \ldots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met een $N(\mu, \sigma^2)$-verdeling, waarbij σ^2 bekend is en $\mu \leq 0$ een onbekende parameter (let op de ongebruikelijke vorm van de parameterruimte!)

(a) Laat zien dat $\min\{\overline{X}, 0\}$ de maximum likelihood schatter voor μ is.

(b) Laat zien dat de onzuiverheid (bias) van de maximum likelihood schatter niet-positief is (≤ 0).

3. Laat $X_1, \ldots, X_n$ onderling onafhankelijk zijn en $N(\theta, 1)$-verdeeld, met $\theta \in \mathbb{R}$ onbekend. We willen de parameter θ Bayesiaans schatten. Als a-priori verdeling kiezen we een $N(0, \tau^2)$-verdeling, waarbij τ^2 gegeven is.

   (a) Laat zien dat de a-posteriori verdeling ook normaal is en bepaal de parameters van die verdeling.

   (b) Bepaal de Bayes-schatter voor θ.

4. Laat $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijk zijn en Poisson verdeeld met parameter $\lambda > 0$. Dus de dichtheid van X_i wordt gegeven door

$$p_\lambda(k) = \mathbb{P}_\lambda(X_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

   (a) Laat zien dat $\sum_{i=1}^n X_i$ een voldoende statistiek is voor λ.

   (b) Laat zien dat $\sum_{i=1}^n X_i$ ook volledig is.

   (c) Bepaal een UMVZ-schatter voor λ.

   (d) Vergelijk de variantie van de UMVZ-schatter uit onderdeel (c) met de Cramér-Rao ondergrens.

5. Laat $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijk zijn en gelijk verdeeld, met dichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \qquad x > 0,$$

   met $\theta > 0$ een onbekende parameter.

   (a) Bepaal de maximum likelihood schatter $\hat{\theta}_n$ voor θ.

   (b) Bepaal de Fisher informatie i_θ (in één waarneming) voor θ.

   (c) Bewijs dat voor iedere $\theta > 0$,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0, 1/i_\theta)$$

   als $n \to \infty$ als θ de ware parameter is. Geef zelf een bewijs, zonder de algemene stelling uit de handout toe te passen.

Normering:

1(a): 2	**2(a): 2**	**3(a): 3**	**4(a): 2**	**5(a): 2**
1(b): 2	**2(b): 2**	**3(b): 1**	**4(b): 2**	**5(b): 2**
1(c): 3			**4(c): 2**	**5(c): 3**
1(d): 2			**4(d): 2**	

Cijfer = max{1, 10*fractie behaalde punten}.