# Stochastiek 2

Inleiding in de Mathematische Statistiek

## Maximum Likelihood-Schatters

# Algemene definitie - 1

Gegegeven: waarneming $X$ en model $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$.

Als $X$ discreet is onder $P_\theta$, definieer dan $p_\theta$ als de *kansmassa functie* van $X$. Dus als $X$ waarden $x_1, x_2, \ldots$ aanneemt, dan

$$p_\theta(x_i) = P_\theta(X = x_i), \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

Als $X$ absoluut continu is onder $P_\theta$, definieer dan $p_\theta$ als de *dichtheid* van $X$.

We noemen $p_\theta$ in beide gevallen de kansdichtheid van $X$.

# Algemene definitie - 2

Gegegeven: waarneming $X$ en model $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$. Zij $p_\theta$ de kansdichtheid van $X$ onder $P_\theta$.

Definitie.
Voor een vaste realisatie $x$ van $X$ definiëren we

$$L(\theta; x) = p_\theta(x), \quad \theta \in \Theta.$$

De functie $\theta \mapsto L(\theta; x)$ op $\Theta$ heet de likelihood-functie.

# Algemene definitie - 3

Definitie.
Voor een realisatie $x$ van $X$ definiëren we de maximum likelihood-schatting als het punt $T(x)$ waar de likelihood $\theta \mapsto L(\theta; x)$ maximaal is. De maximum likelihood-schatter is de bijbehorende schatter $T(X)$.

N.B.
- Uiteraard is de MLS alleen goed gedefinieerd als het maximum van de likelihood bestaat.
- De likelihood kan meerdere maxima hebben. In dat geval is het beter om van een MLS te spreken.
- Deze gevallen zullen we in dit college niet tegenkomen.

# Berekenen van maximum likelihood-schatters - 1

1. Bepaal de (simultane) dichtheid $p_\theta$ van de waarneming $X$.
2. Beschouw de likelihood $L(\theta; x) = p_\theta(x)$.

Als de likelihood een positieve, gladde functie op $\Theta$ is:

3. calculus.

In andere gevallen:

3. ad hoc argument, plaatje.

# Berekenen van maximum likelihood-schatters - 2

Geval van een gladde, positive likelihood. Stel $\Theta \subseteq \mathbb{R}$.

- Bereken de likelihood $L(\theta; x)$. (Vaak: product van marginale dichtheden.)
- Berekenen de log-likelihood $\ell(\theta; x) = \log L(\theta; x)$.
- Berekenen de score functie $\dot{\ell}(\theta; x) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ell(\theta; x)$.
- Nulstellen en controleren of er een maximum is gevonden.

$\longrightarrow$ vb 3.13, 3.14, 3.15, 3.17

# Momentenschatters

# Momenten

Definitie.
Zij $X$ een stochastische variabele en $j \in \mathbb{N}$. Het *jde moment* van $X$ is de verwachting $EX^j$.

Laat $X_1, \ldots, X_n$ o.o. zijn en gelijk verdeeld en $j \in \mathbb{N}$. Het *jde steekproef moment* is het gemiddelde

$$\bar{X}^j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^j.$$

# Momentenschatters

Idee: steekproefmomenten zijn goede schatters voor echte momenten. Schat parameter(s) z.d.d. ze *matchen*.

Definitie.

Laat $X_1, \dots, X_n$ o.o. zijn en gelijk verdeeld volgens $P_\theta$, $\theta \in \Theta$. Een momentenschatter $\hat{\theta}$ voor $\theta$ is de oplossing van een stelsel vergelijkingen

$$E_\theta X_1^j = \bar{X}^j, \qquad j \in J,$$

voor zekere $J \subset \mathbb{N}$.

N.B. De conventie is om $J$ zo te kiezen dat de laagste momenten worden gebruikt en dat er een unieke oplossing is.

$\longrightarrow$ vb 3.27, 3.28

Bayes-schatters

# Bayesiaanse paradigma

**Tot nu toe:** waarneming $X$ heeft een verdeling die afhangt van een onbekende parameter $\theta$. Deze heeft een vaste, deterministsche waarde die we proberen te schatten.

**Bayesiaanse uitgangspunt:** van onbekende grootheden zoals de parameter $\theta$ moet je niet aannemen dat ze een vaste, maar onbekende waarde hebben, maar die moet je opvatten als stochastische grootheden.

$\longrightarrow$ natuurconstanten

# Bayesiaanse statistiek

Setting: waarneming $X$ met dichtheid $p_\theta$, $\theta \in \Theta$.

- De ideeën/meningen die we hebben over de mogelijke waarden van de parameter **voordat** we de data gezien hebben kwantificeren we mbv een a-priori dichtheid $\pi : \Theta \to [0, \infty)$.
- De dichtheid $p_\theta$ van de data vatten we op als de **voorwaardelijke** dichtheid van $X$, gegeven dat de parameter de waarde $\theta$ heeft.
- **Nadat** we de data $X = x$ hebben gezien, bepalen we in deze setting de a-posteriori verdeling van de parameter: de verdeling van de parameter gegeven $X = x$.

# Bepalen van de a-posteriori verdeling - 1

Dus voor de Bayesiaan:

- De parameter is een stochast $\bar{\Theta}$ met dichtheid $p_{\bar{\Theta}} = \pi$.
- Voor de voorwaardelijke dichtheid van $X$ gegeven $\bar{\Theta} = \theta$ geldt $p_{X \mid \bar{\Theta}=\theta}(x) = p_\theta(x)$.

In deze setting heeft het paar $(X, \bar{\Theta})$ simultane dichtheid

$$p_{X,\bar{\Theta}}(x,\theta) = p_{X \mid \bar{\Theta}=\theta}(x) p_{\bar{\Theta}}(\theta) = p_\theta(x)\pi(\theta)$$

en $X$ heeft marginale dichtheid

$$p_X(x) = \int p_{X,\bar{\Theta}}(x,\theta)\, d\theta = \int p_\theta(x)\pi(\theta)\, d\theta.$$

## Bepalen van de a-posteriori verdeling - 2

Maar dan geldt voor de a-posteriori dichtheid $p_{\bar{\Theta}\,|\,X=x}$

$$\begin{aligned} p_{\bar{\Theta}\,|\,X=x}(\theta) &= \frac{p_{X,\bar{\Theta}}(x,\theta)}{p_X(x)} \\ &= \frac{p_\theta(x)\pi(\theta)}{\int p_\theta(x)\pi(\theta)\,d\theta} \\ &\propto p_\theta(x)\pi(\theta). \end{aligned}$$

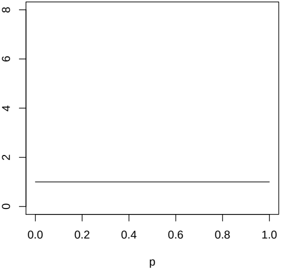
We gebruiken deze uitdrukking nu als **definitie** voor de a-posteriori verdeling.

# Bayes' voorbeeld

- $X \sim \text{bin}(50, \theta)$, waarneming $X = 42$. Wat is $\theta$?

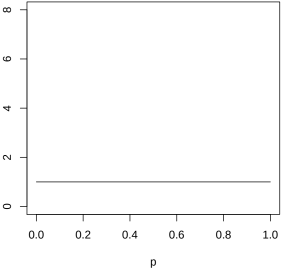
## Bayes' voorbeeld

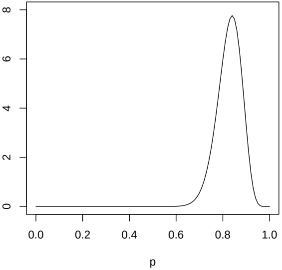
- $X \sim \text{bin}(50, \theta)$, waarneming $X = 42$. Wat is $\theta$?
- Neem uniforme a-priori verdeling op $[0, 1]$.



## Bayes' voorbeeld

- $X \sim \text{bin}(50, \theta)$, waarneming $X = 42$. Wat is $\theta$?
- Neem uniforme a-priori verdeling op $[0, 1]$.




a-priori $\pi$ $\quad \xrightarrow{\text{data } X = 42} \quad$ a-posteriori $p_{\bar{\Theta} \mid X=42}$

# Bayes-schatters

We kunnen nu de a-posteriori verdeling gebruiken om schatters te construeren. Standaard schatter: de verwachting.

**Definitie.**
De Bayes-schatter is de verwachting van de a-posteriori verdeling. Dus voor de realisatie $X = x$ is de schatting

$$T(x) = \int \theta p_{\bar{\Theta} \mid X=x}(\theta)\, d\theta = \frac{\int \theta p_\theta(x)\pi(\theta)\, d\theta}{\int p_\theta(x)\pi(\theta)\, d\theta}.$$

$\longrightarrow$ vb 3.38