Korteweg-de Vries Instituut	Tentamen Stochastiek 2
UvA	30 januari 2015

- **U mag geen rekenmachines, telefoons, laptops, of andere hulpmiddelen gebruiken.**
- **Zet uw naam en studentnummer duidelijk bovenaan op *alle* vellen die u inlevert.**

1. Laat $X_1, \ldots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = \theta 2^{-\theta} x^{\theta-1}, \quad x \in [0,2],$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

(a) Bepaal de momentenschatter voor θ.

(b) Bepaal de maximum likelihood schatter voor θ.

(c) Bereken de waargenomen Fisher informatie.

(d) Geef een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor θ, met onbetrouwbaarheid $\alpha \in (0,1)$.

(e) Beschouw het toetsingsprobleem $H_0 : \theta = 1$ tegen $H_1 : \theta \neq 1$. Bepaal de likelihood-ratiostatistiek voor dit probleem.

(f) Bepaal het kritieke gebied voor de likelihood-ratiotoets, met onbetrouwbaarheid bij benadering $\alpha \in (0,1)$.

2. Laat $X_1, \ldots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met een exponentiële verdeling met parameter $\theta > 0$. Dat wil zeggen dat de dichtheid p_θ van X_i gegeven is door

$$p_\theta(x) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0.$$

We gaan de parameter θ Bayesiaans schatten en gebruiken daarvoor als a-priori verdeling een exponentiële verdeling met parameter $\lambda > 0$. De a-priori dichtheid is dus gegeven door

$$\pi(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta}, \quad \theta > 0.$$

(a) Bepaal de a-posteriori verdeling. U mag hierbij gebruik maken van het feit dat voor $r, \omega > 0$, de functie

$$f(x) = \frac{\omega^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\omega x}, \quad x > 0,$$

een kansdichtheid is, met Γ de gamma functie (de precieze vorm van Γ doet er niet toe). De bijbehorende verdeling heet een gamma verdeling met parameters r en ω.

(b) De gamma verdeling met parameters r en ω heeft verwachting r/ω en variantie r/ω^2. Bepaal nu de Bayes schatter voor θ.

3. Twee groepen studenten hebben een tentamen Statistiek gemaakt. Hun resultaten zijn als volgt:

   Groep 1:

   5.8, 5.3, 8.6, 4.8, 5.6, 6.6, 7.1, 9.1, 8.3, 6.4, 5.6, 8.3, 8.4, 4.3, 7.3, 7.5, 4.8, 7.5, 9.1, 7.1

   Groep 2:

   9, 6.8, 8.4, 5.6, 9.3, 4.6, 7, 8.4, 7.6, 6.6, 7.9, 9.4, 9.5, 6.3, 7.4, 9.8, 8, 9.8, 9, 7.8, 6.6, 7.1

   We willen onderzoeken of Groep 2 beter heeft gepresteerd dan Groep 1. De resultaten van Groep 1 noteren we met $x_1, \dots, x_{20}$ en die van Groep 2 met $y_1, \dots, y_{22}$. We nemen aan dat al deze stochasten onafhankelijk zijn en dat x_i's kunnen worden opgevat als realisaties uit een $N(\mu_1, \sigma^2)$-verdeling en de y_j's als realisaties uit een $N(\mu_2, \sigma^2)$-verdeling, waarbij $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ en $\sigma^2 \geq 0$ onbekende parameters zijn.

   (a) Formuleer de bovenstaande onderzoeksvraag als een toetsingsprobleem en beschrijf de standaard toets die exact niveau $\alpha \in (0, 1)$ heeft.

   (b) Laat zien dat omdat de steekproef relatief groot is, de toetsingsgrootheid van de standaardtoets uit onderdeel (a) bij benadering een standaard normale verdeling heeft onder de nulhypothese. Motiveer uw antwoord.

   (c) De gerealiseerde toetsingsgrootheid heeft de waarde -0.64 voor de bovenstaande data. Geef een uitdrukking voor de corresponderende benaderde overschrijdingskans (p-waarde). (U hoeft niet de numerieke waarde te bepalen.)

   (d) Welke conclusie trekt u uiteindelijk ten aanzien van de hypothesen? U mag gebruik maken van de onderstaande tabel voor de standaard normale verdelingsfunctie.

x	0.60	0.61	0.62	0.63	0.64	0.65	0.66	0.67	0.68	0.69	0.70
$\Phi(x)$	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755	0.758

4. Laat $X_1, \dots, X_n$ onafhankelijk en gelijk verdeeld zijn, de dichtheid van X_i gegeven door

$$\mathbb{P}_\theta(X_i = k) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

   met $\theta > 0$ een onbekende parameter.

   (a) Bepaal de maximum likelihood schatter voor θ.

   (b) Bepaal de Cramér-Rao ondergrens voor de variantie van een zuivere schatter voor θ.

   (c) Ga na of de maximum likelihood schatter voor θ een UMVZ-schatter is.

Maximale punten:

1: 3,4,2,2,2,2. **2**: 3,2. **3**: 3,2,2,2. **4**: 3,3,2.

Berekening Eindcijfer:

T = 1 + 9×"fractie behaalde punten".
Als T < 5, dan **Eindcijfer** = T.
Als T ≥ 5, dan **Eindcijfer** = 0.5×T + 0.3×Tussentoets + 0.2×Inleverhuiswerk.