Korteweg-de Vries Instituut	Tussentoets Stochastiek 2
UvA	9 januari 2015

- **U mag geen rekenmachines, telefoons, laptops, of andere hulpmiddelen gebruiken.**
- **Zet uw naam en studentnummer duidelijk bovenaan op *alle* vellen die u inlevert.**

Succes!

1. Laat $X_1, \ldots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = \begin{cases} e^{\theta - x}, & x \geq \theta, \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

waarbij $\theta \in \mathbb{R}$ een onbekende parameter is.

(a) Bereken de verwachting $\mathbb{E}_\theta X_1$ en bepaal de momentenschatter voor θ.

(b) Bepaal de maximum likelihood schatter voor θ.

(c) Beschouw de hypotheses $H_0 : \theta \leq 0$ tegen $H_1 : \theta > 0$. We gebruiken $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ als toetsingsgrootheid voor dit probleem. Bepaal, voor gegeven $\alpha \in (0, 1)$ en steekproefgrootte n, het kritieke gebied van een toets van niveau α op basis van deze toetsingsgrootheid.

2. Laat $X_1, \ldots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met een $N(\mu, \sigma^2)$-verdeling, waarbij σ^2 bekend is en $\mu \geq 0$ een onbekende parameter (let op de ongebruikelijke vorm van de parameterruimte!)

(a) Laat zien dat $\max\{\overline{X}, 0\}$ de maximum likelihood schatter voor μ is.

(b) Laat zien dat de onzuiverheid (bias) van de maximum likelihood schatter niet-negatief is (≥ 0).

3. Laat $X_1, \ldots, X_n$ onderling onafhankelijk zijn en $N(\theta, 1)$-verdeeld, met $\theta \in \mathbb{R}$ onbekend. We willen de parameter θ Bayesiaans schatten. Als a-priori verdeling kiezen we een $N(0, \tau^2)$-verdeling, waarbij τ^2 gegeven is.

   (a) Laat zien dat de a-posteriori verdeling ook normaal is en bepaal de parameters van die verdeling.

   (b) Bepaal de Bayes-schatter voor θ.

4. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een exponentiële verdeling met parameter $\lambda > 0$, d.w.z. iedere X_i heeft dichtheid p_λ gegeven door

$$p_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0,$$

   met $\lambda > 0$ een onbekende parameter.

   (a) Bepaal een reëel-waardige voldoende statistiek voor λ.

   (b) Bepaal de Cramér-Rao ondergrens voor de variantie van een zuivere schatter voor $1/\lambda$.

   (c) Bepaal een UMVZ-schatter voor $1/\lambda$.

5. De opiniepeiler Maurice is geïnteresseerd in de fractie p van alle Nederlanders die nog vertrouwen in de regering Rutte heeft. Hij belt daarom 100 willekeurige mensen op en vraagt ze of ze nog vertrouwen hebben. Zij X het aantal ondervraagden dat de vraag bevestigend beantwoordt.

   (a) Als we aannemen dat Nederlanders onafhankelijke denkers zijn, wat is dan een redelijk statistisch model voor dit probleem?

   (b) Maurice wil weten of the fractie p groter dan $1/2$ is. Formuleer dit als een statistisch toetsingsprobleem.

   (c) Geef de standaard toets van niveau $\alpha = 0.05$ voor dit probleem. U mag hierbij gebruik maken van het feit dat voor de verdelingsfunctie F van de binomiale verdeling met parameters $n = 100$ en $p = 1/2$ geldt dat

$$F(55) = 0,86, \quad F(56) = 0,90, \quad F(57) = 0,93, \quad F(58) = 0,96, \quad F(59) = 0,97.$$

   (d) Stel dat 58 ondervraagden zeggen nog vertrouwen de hebben. Kan Maurice dan bij een onbetrouwbaarheidsniveau 5% concluderen dat inderdaad $p > 1/2$?

Normering:

1(a): 2	**2(a): 2**	**3(a): 3**	**4(a): 2**	**5(a): 1**
1(b): 2	**2(b): 2**	**3(b): 1**	**4(b): 2**	**5(b): 1**
1(c): 3			**4(c): 2**	**5(c): 3**
				5(d): 1

Cijfer = max{1, 10*fractie behaalde punten}.