Korteweg-de Vries Instituut	Oefententamen Stochastiek 2
UvA	26 januari 2015

- **U mag geen rekenmachines, telefoons, laptops, of andere hulpmiddelen gebruiken.**
- **Zet uw naam en studentnummer duidelijk bovenaan op *alle* vellen die u inlevert.**

Succes!

1. Laat $X_1, \ldots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid $f(\cdot;\theta)$ gegeven door

$$f(x;\theta) = \theta^2 x e^{-\theta x}, \quad x \geq 0,$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

   (a) Bepaal de momenten schatter voor θ.

   (b) Bepaal de meest aannemelijke schatter (maximum likelihood estimator) voor θ.

   (c) Bereken de waargenomen Fisher informatie.

   (d) Geef een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor θ, met onbetrouwbaarheid α.

   (e) Beschouw het toetsingsprobleem $H_0 : \theta = 1$ tegen $H_1 : \theta \neq 1$. Bepaal de likelihood ratio statistiek voor dit probleem en bepaal het kritieke gebied voor de likelihood ratio toets, met onbetrouwbaarheid bij benadering $\alpha = 0.05$.

2. Laat $X_1, \ldots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid $f(\cdot;\theta)$ gegeven door

$$f(x;\theta) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\theta x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is. We gaan deze parameter Bayesiaans schatten en gebruiken daarvoor als a-priori verdeling een gamma verdeling met vast gekozen parameters $r, \lambda > 0$. Deze heeft dichtheid

$$\pi(\theta) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \theta^{r-1} e^{-\lambda\theta}, \quad \theta > 0,$$

waarbij Γ de gamma functie is (de precieze vorm van Γ doet er niet toe), verwachting r/λ en variantie r/λ^2.

   (a) Bepaal de a-posteriori verdeling. Welke bekende verdeling is dit?

   (b) Bepaal de Bayes schatter voor θ.

3. Laat $X_1, \ldots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met een $N(\mu, \sigma^2)$-verdeling, waarbij $\mu \in \mathbb{R}$ en $\sigma^2 > 0$ onbekend zijn. Beschouw de hypotheses $H_0 : \mu \leq 0$ en $H_1 : \mu > 0$.
   (a) Geef de standaard toets voor dit probleem, met onbetrouwbaarheidsdrempel α. Laat zien dat deze toets inderdaad niveau α heeft.
   (b) Stel nu dat $\sigma^2 = 9$, dus σ is nu bekend. Geef de standaard toets voor dit probleem met onbetrouwbaarheidsdrempel α. Leg weer duidelijk uit waarom deze toets niveau α heeft.
   (c) Wat is het grootste verschil tussen de antwoorden van onderdelen (a) en (b) en waardoor wordt dit veroorzaakt? Geef een *korte*, intuïtieve verklaring.

4. Laat $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijk zijn en Poisson verdeeld met parameter $\lambda > 0$. Dus de dichtheid van X_i wordt gegeven door

$$\mathbb{P}_\lambda(X_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

   (a) Bepaal de meest aannemelijke schatter (MLE) voor λ.
   (b) Bepaal de Cramér-Rao ondergrens voor de variantie van een zuivere schatter voor λ.
   (c) Ga na of de meest aannemelijke schatter voor λ een UMVU-schatter is.

Normering:

1(a):	3	2(a):	3	3(a):	3	4(a):	3
1(b):	3	2(b):	2	3(b):	3	4(b):	3
1(c):	3			3(c):	2	4(c):	2
1(d):	2						
1(e):	4						

Berekening Eindcijfer:

1. **T(entamenresultaat) = (#behaalde punten + 4)/4.**
2. **Als T < 5, dan Eindcijfer = T.**
   Als T ≥ 5, dan
   Eindcijfer = 0.5*T + 0.3*Tussentoets + 0.2*Inleverhuiswerk.